1088. ノルム環ト Segal ノ定理ニツイテ I

岩澤 健吉（東大）

I.E Segal ハサキニ任意ノ locally compact, separable ナ群 G ニ對シ group ring R(G) ヲ定義シ，特ニ G ガ abel 群又ハ compact 群ナル場合ニ種々ノ興味アル結果ヲ得マシタ。[1) ソノ compact 群ニ關スル主ナ結果ハ深宮氏ニヨツテ簡單ナ證明ガ與ヘラレマシタ。[2)]

コヽデハ G ガ一般ニ locally compact ナル場合ヲ考ヘ、特ニ G ノ表現ト R(G) ノ表現トノ關係ヲ述ベテ見ヨウト思ヒマス。ソレハ Segal ノ論文ニ於ケル定理 3 ノ

---

1) I.E. Segal : The group ring of a locally compact group, I, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A. 27(1940)

2) 深宮政範；Bicompact ナ群ノ群環ニツイテ，全國紙上談話會，第 240 号

擴張ニ當ルワケデスガ我々ハ R(G) ヨリモムシロ L(G) ヲ目標ニシテ進ミマシタ（後述）。然シ Segal ノ証明ハ知ル由モアリマセンガ恐ラク以下述ベルモノト大同小異ナモノデアリマセウカラ，以下ノ結果モ亦既知ノモノト思ハレマス。

I. ノルム環ニ関スル注意

§1. 我々ハ Gelfand ノノルム環[3] ヲ用ヒテ Gelfand, Raikov[4] ガ abel 群ノ場合ニ用ヒタ方法ニ從フコトニシマスノデ始メニ一般ノ非可換ナノルム環ニツイテ若干ノ簡單ナ注意ヲ述ベルコトニシマス。勿論非可換ノルム環ノ一般論ト云フヤウナモノデハアリマセン。

先ヅ一般ノノルム環 R ヲ Gelfand, N. R., §1 ニヨリ定義シマス。但シコノ際乘法ノ可換性ハ假定シマセン。可換性ハナクトモ N.R. ニ於ケル代數的ナ定理ノ多クハ成立スルコトガ容易ニ確カメラレマス。唯逆元 x^{-1} ト云フトキ左逆元ト右逆元トヲ区別セネバナラヌコト，及ビ

---

3) I. Gelfand; Normierte Ringe, Rec. Math., 51 (1941)．コノ論文ヲ以下 N.R. トスル．

4) I. Gelfand and D. Raikov, C.R. Acad. Sci. URSS, 28 (1940

Ideal ニツイテモ左-Ideal，右-Ideal，両側-Ideal ノ別ヲ考ヘネバナラヌコト等ヲ注意スレバヨイワケデ，ソノヤウナ点ヲ考慮ニ入レサヘスレバ N.R. ノ §1—§5 ノ定理ハ凡テソノマヽ成立シマス。

特ニ I_l ヲ任意ノ閉ヂタ左-Ideal トスレバ R/I_l ハ一般ニ環デハアリマセンガ然モ尚 Banach 空間デ R ノ各元 x ハソノ（左カラノ）Operator ト考ヘラレ $x \in R$, $Y \in R/I_l$ ニ對シ $\|xY\| \leqq \|x\|\,\|Y\|$ トナリマス．（N.R., Hilfssatz 4）然シ可換ナ場合ト本質的ニ異ナル点ハ單純ノルム環ガ必ズシモ複素数体（或ハソノ上ノ有限次ノ Algebra）トナラヌコトデ，コノタメ R ヲ maximal Ideal デ割ツタ R/I ノ様子ガワカラヌコトデス。

§2. ヨツテ我々ハ先ヅ一番簡單ナ有限次元ノノルム環ヲ調ベテ見ルコトニシマス。

複素数体 K 上ノ n 次ノ全行列環ヲ K_n トカクコトニシ

$$x \in K_n, \quad x = \sum_{i,j} \alpha_{i,j}\, e_{i,j}, \quad \alpha_{i,j} \in K,$$

e_{ij} ハ行列ノ單位

ニ對シテ

$$(1) \quad \|x\|^{*} = \Big(\sum_{i,j} |\alpha_{ij}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

トオケバコノ norm ニヨリ K_n ガノルム環トナルコトハ明

カデス。（但シ $\|e\|^*=1$ ニハナッテキナイ）ヨッテ K_n ノ部分環ハ矢張リスベテ上ノ norm ニヨリノルム環トナリマスガ実ハ有限次元ノノルム環ハコレ以下ニハ存在シナイコトガ証明サレマス。ソノ為ニ先ヅ

補助定理 1.[5] Mヲ一ツノ有限 K-加群トシソノ Basis ヲ $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n$ トスル。B ハ Banach 空間デ K-加群トシテMニ含マレテオルモノトスレバ B ニ於ケル norm $\|x\|$ ハMニ於テ定義サレル norm

$$\|x\|^*=\|\alpha_1 u_1+\cdots\cdots+\alpha_n u_n\|^*=\left(|\alpha_1|^2+\cdots\cdots+|\alpha_n|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$\alpha_i \in K$$

ト等値デアル。即チ適当ニ $C_1, C_2>0$ ヲトレバBニ属スル任意ノ x ニ対シテ

$$C_1\|x\|^* \leqq \|x\| \leqq C_2\|x\|^*$$

トナル。

証明. B＝M ノトキハ

$$\|x\| \leqq |\alpha_1|\|u_1\|+\cdots\cdots\cdots+|\alpha_n|\|u_n\|$$
$$\leqq\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\|u_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}=C_2\|x\|^*$$

ナル故 $\|x\|^*$ カラ $\|x\|$ ヘノ寫像ハ連続トナリコレハ明白デス。

一般ニハ B ノ K-Basis $v_1, v_2, \cdots\cdots, v_m$ ヲト

---

5) コンナコトハ周知ノコトデアリマセウガ一應証明シテオキマス。

リコレヲ補充シテMノBasis $v_1, v_2, \cdots, v_m, w_1, \cdots w_{n-m}$ ヲツクリマス。

$$x \in M,\ x = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = \beta_1 v_1 + \cdots$$
$$\cdots + \beta_m v_m + \beta_{m+1} w_1 + \cdots + \beta_n w_{n-m}$$

ナルトキ

$$\|x\|^{**} = (|\beta_1|^2 + \cdots + |\beta_m|^2 + |\beta_{m+1}|^2 + \cdots + |\beta_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

トオケバB＝Mナルトキノ結果ニヨリ$\|x\|^*$ト$\|x\|^{**}$トハ等値、特ニxガBニ含マレテヰレバ$\beta_{m+1} \cdots = \beta_m$デ$\|x\|^{**}$ハBニ於ケルーツノnormテ支ヘマスガ再ビB＝Mナルトキノ結果ヲ用ヒレバコレハBニ於ケル$\|x\|$ト等値　ヨツテ結局norm $\|x\|$ハB内ニinduceサレタnorm $\|x\|^*$ト等値ニナリ定理ハ証明サレマシタ。

サテ任意ノ有限次元ノノルム環ハ環トシテハ無論行列環ノ部分環トナリマスカラ上ノ補助定理ニヨリ直テニ次ノ定理ガ得ラレマス。

定理1.　有限次元ノ　ノルム環ハ　(1)ナル norm ニ関スル全行列環K_nノアル部分環ト一致スル。

コノ定理ニヨリ有限次元ノ　ノルム環ノ様子ハワカッタワケデスガ尚後デ用ヒル定理ヲコヽデ証明シテオキマス。

定理2.　R＝K_nニ於テ$\sqrt[n]{\|x^n\|} \rightarrow 0\ (n \rightarrow \infty)$ナル為メニ必要且ツ十分ナル條件ハ零巾元ナルコトデアル。

証明　十分ノ方ハ明白デス。ヨッテxガ零巾デナイトスレバ適当ニyヲトリ標準型

$$z = yxy^{-1} = \begin{pmatrix} \rho_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \rho_n \end{pmatrix}$$

ヲツクッタトキ少クトモ一ツノρ_iハ0デハアリマセン。コレヲ$\rho_k \neq 0$トスレバ$\|z^n\|^* \geq |\rho_k|^n$

ヨッテ　$\underline{\lim} \sqrt[n]{\|z^n\|^*} \geq |\rho_k| > 0$　即チ$\lim \sqrt[n]{\|z^n\|^*} \neq 0$.

任意ノ norm ハ $\|x\|^*$ト等値ナル故 $\lim \sqrt[n]{\|z^n\|} \neq 0$

ヨッテ $\lim \sqrt[n]{\|x^n\|} \neq 0$.（norm ガ規準化サレテアレバ$\|z^n\| = \|yx^n y^{-1}\| \leq \|y\| \|x^n\| \|y^{-1}\|$ナル故）

§3. 前節ノ結果ヲ用ヒテノルム環ノ表現ニツイテ注意ヲ述ベテオキマス。但シココデ表現トハ普通ノヤウニノルム環Rカラ有限次ノ行列ヘノK上ノ環トシテノ準同型寫像ヲ云フモノトシマス。一般ニ表現ヲ

(2)　$x \longrightarrow T(x) = \{t_{ij}(x)\}$　　$i, j = 1, 2, \cdots, n$

トシ，ソノ核即チ$T(x) = 0$ナル如キxノツクル両側 Ideal ヲM_Tト書クコトニシマス。

$\{T(x)\}$全体ハ行列環トシテ又一ツノノルム環ト考ヘラレマス。コノトキ(2)ナル寫像ガ連続ナラバM_TハRデ閉ヂタ Ideal トナリマスガコノ逆モ成立シマス。何トナレバM_Tガ閉ヂテヰレバ N. R. Hilfssatz 4 ノ方法デ$R/M_T \simeq \{T(x)\}$ニ norm $\|X\|$ヲ入レ、バコノ norm

ニ對シテハ(2)ハ明カニ連續寫像トナリマス。然ルニ定理Lニヨレバ $\{T(x)\}$ ノ norm ハスベテ等値デスカラ $\|x\|$ カラ $\|T(x)\|^*$ ヘノ寫像モ連續トナリマス。即チ適當ニ常數 $C>0$ ヲトレバ

$$(3) \quad \|x\| \geqq \|X\| \geqq \frac{1}{C}\|T(x)\|^*$$

特ニ

$$(4) \quad C\|x\| \geqq |t_{ij}(c)|^0$$

マトメテ云ヘバ

定理3. ノルム環Rノ表現(2)ガ連續ナルタメニ必要且ツ十分ナル條件ハ核 M_T ガRデ閉ヂテヰルコトデアル。コノトキRノ任意ノ x ニ対シ適當ニ常數 $C>0$ ヲトレバ(4)ガ成立スル。

§4. 一般ノノルム環デハトテモ手ガ出ナイノデ以下我々ハ常ニ次ノ如キ假定ヲオイテ進ムコトニシマス。

假定A. I_l, I_r ヲRノ任意ノ maximal 左-乃至右-Ideal トスレバ R/I_l, R/I_r ハ常ニ有限次元デアル。

サウスレバ先ヅ

定理4. 假定Aガ満足サレテヰレバRノ任意ノ maximal 両側-Ideal I ニ對シ R/I モ亦常ニ有限次元, 從ツテソレハK上ノ全行列環ニ同型デアル。

(5) $R/I \simeq K_n$

証明. Iヲ含ム maximal 左-Ideal ヲ I_l トセヨ. 假定ニヨリ R/I_l ハ有限次元デソレハ R ノ元ヲ左-operator トシテ有スルカラ R ノ表現加群ト考ヘラレマス. コノ表現デ 0 ニ對應スル両側 Ideal ヲ I' トスレバ明カニ $I' \supset I$ デスガ I ハ maximal ナル故 $I = I'$

$R/I = R/I'$ ガ有限次元ナルコトハコレカラワカリマスガソレハ K 上ノ単純環デスカラ $R/I \simeq K_n$.

コノ証明カラ又直チニ次ノコトガワカリマス。

定理5. 假定Aノモトニ任意ノ maximal 左-Ideal I_l ハアル maximal 両側-Ideal I ヲ含ム. maximal 右-Ideal I_r ニ関シテモ同様。

(注意) R ニ於テ定理5ガ成立シテヰテモ必ズシモ逆ニAガ満足サレテハヰマセン. (サウ云フ実例ヲツクルコトガ出来マス) 又定理5ヲ云フニハ假定Aノウチ I_l カ I_r カドチラカダケガ成立シテヰレバ十分デスガ、ソレラノ條件ガ果シテ独立ナモノカドウカハヨクワカリマセン。

定理6. 假定Aノモトニ R ノ元 x ノ左逆元ハ又 x ノ右逆元デアリ逆モ成立スル. ヨッテコノ唯一ノ逆元ヲ x^{-1} トカクコトガ出来ル。

証明. x ガ左(右)-逆元ヲ有スルタメニ必要且ツ十分ナル條件ハ x ガ任意ノ maximal 左(右)-Ideal ニ

含マレスコトデアリマス。（N. R. Satz 6）定理2ニヨレバソレハ又任意ノ maximal 両側 Ideal I ヲトルトキ x ガ R/I ニ於テ maximal 左(右)-Ideal ニ含マレスコトヽ同ジデスガ $R/I \cong K_n$ デハソレハ又 maximal 右(左) Ideal ニ含マレスコトヽ等値（即チ K_n ニ於テ行列式ガ0デナク逆元ヲ有スルコト）デスカラコレデヨイワケデス。

サテ可換ノ場合ト同様ニ $\sqrt[n]{\|x^n\|} \to 0$ $(n \to \infty)$ ナル R ノ元 x ノコトヲ一般零巾元ト呼ブコトニスレバ次ノ定理ガ成立シマス。[6]

定理7. 假定Aノモトニxガ一般零巾元ナルタメニ必要且ツ十分ナル條件ハRノ任意ノ maximal 両側 Ideal I ヲトッタトキ x ガ R/I ニ於テ普通ノ意味デ零巾ナルコトデアル。

証明. maximal 両側 Ideal I ヲトッタトキ (5) ニヨル R/I ノ既約表現ノ一ツヲ $T_I(x)$ トカクコトニシマス。maximal Ideal ハ閉ヂテヰマスカラ定理3ニヨリ $T_I(x)$ ハ連續表現デス。

サテ任意ノ $x \in R$ ニ對シ

$$\|x^n\| \geqq \|T_I(x^n)\| = \|T_I(x)^n\|$$

ナル故 $T_I(x)$ ガ零巾ナルコト，即チ x ガ R/I デ零巾ナルコトハ必要條件デアリマス。逆ニ $T_I(x)$ ガ零巾デアレバ任意

---

6) N. R. Satz 8.

ノ $\lambda \in K$ ニ對シ $T_I(\lambda x) = \lambda T_I(x)$ モ亦零巾ナル故 m ヲ十分大キクトレバ $(\lambda x)^m \in I$. コレカラ $e-\lambda x$ ハ決シテ maximal 左-Ideal, I_ℓ ニ含マレヌコトガ証明サレマス。

何トナレバ $e-\lambda x \in I_\ell$ トスレバ定理2ニヨリ $I_\ell \supset I$ ナル maximal 両側-Ideal I ヲトリ $(\lambda x)^m \in I$ トシマス。サウスレバ $(\lambda x)^{m-1}(e-\lambda x) = (\lambda x)^{m-1} - (\lambda x)^m \in I_\ell$ カラ $(\lambda x)^{m-1} \in I_\ell$ ヲ得同様ニシテ $(\lambda x)^{m-2}, \cdots\cdots, (\lambda x)$, $e \in I_\ell$ トナリコレハ不合理。故ニ $e-\lambda x \notin I_\ell$. 從ッテ $e-\lambda x$ ハ左逆元ヲ有シマスガ定理6ニヨリ

$$(e-\lambda x)^{-1}$$

ハ凡テノ $\lambda \in K$ ニ對シ存在スルコトニナリマス。コレカテハ可換環ノ場合ト全ク同様デ $(e-\lambda x)^{-1}$ ガ λ ノ整函数ナルコトカラ展開.

$$(e-\lambda x)^{-1} = e + \lambda x + \lambda^2 x^2 + \cdots\cdots$$

ニ於テ $\|\lambda^n x^n\| \longrightarrow 0$

ヨッテ $\overline{\lim} \sqrt[n]{\|x^n\|} \leq \frac{1}{|\lambda|}$

λ ハ任意ダカラ

$$\lim \sqrt[n]{\|x^n\|} = 0$$

トナリマス。

サテ再ビ可換環ノ場合ト同様ニ R ニ於ケル凡ベテノ Maximal 両側-Ideal ノ共通-Ideal ヲ R ノ根基 (Radikal) ト呼ブコトニスレバ上ノ一般零巾元ノ全

体ガ必ズシモ根基ト一致スルワケデハアリマセンガ（例ヘバ $R=K_n$ ノ場合ヲ見レバヨイ）次ノ定理ガ成立シマス。

定理8. 假定Aノモトニ R ニ於ケル一般零巾元ノ全体ヲ N トスレバ根基 N_0 ハ N ニ含マレル最大ノ左(右)-Ideal 従ッテ最大ノ両側 Ideal デアル。

証明. N_0 ガ N ニ含マレルコトハ前定理ニヨリ明カデスカラ N ニ含マレル任意ノ左-Ideal I_ℓ ガ N_0 ニ含マレルコトヲ云ヘバ十分デス。サテ任意ノ maximal 両側 Ideal I ヲトルトキ $I_\ell{}^I/_I$ ハ $R/_I$ ノ左-Ideal デスガ $I_\ell\subset N$ ナル假定ニヨリソレハ零巾元バカリカラ成ルモノデ従ッテ $I_\ell\cdot I=I$,[7] $I_\ell\subset I$. I ハ任意デスカラ $I_\ell\subset N_0$.

定理8ニヨリ特ニ假定Aノ満足サレテヰルノルム環デ一般零巾元ガ0以外ニ存在シナイ場合ニハ $N_0=0$, 即チ R ハ準単純環デアルコトガ云ヘルワケデス。

§5. 以上ノ如ク假定Aヲ承認スレバノルム環ノ理論ハ代数的ナ部分ニ関スル限リアル程度マデ可換ナ場合ト同様ニ進ムコトガ出来マスガ，位相的部分、即チ maximal Ideal ニ Topologie ヲ入レテ論ズルトイフヤウナ部

---

7) $R/_I\simeq K_n$ ナル故 $R/_I$ ノ Ideal ハ0デナケレバ idempotent ナ元ヲ含ム。

分ハソノマヽデハ功ク行キマセン。コレハ特ニ一般ノルム環ノ表現ノ問題ト関聯シテ今後ニ残サレタ問題デアルト思ヒマス。

次ニ假定Aニ関シ少シバカリ注意ヲ述べテ見マス。假定Aヲ満足シナイノルム環が存在スル コトハ Hilbert 空間ニ於ケル有界作用素カラ容易ニソノ例ヲツクル コトが出来マス。又假定Aヲ満足スル場合トシテハ次ノ例が知ラレテオマス。

1. Rが可換ナル場合

2. R/I_0 が有限次元ナル如キ一ツノ両側 Ideal I_0 が存在シテ I_0 ニ含マレル x ニ対シテハ $A_x \cdot y = x \cdot y$, $A'_x y = yx$ ナル Operator A_x, A'_x が完全連續ナル場合.

1ハ Gelfand ノ可換ノルム環ノ場合デアッテ，2ハ深宮氏が compact 群ノ群環ニ於テ述べラレタ場合デアリマス。8)

一般ニドノヤウナ條件ガアレバ假定Aが満足サレルカト云フコトハ難カシイ問題デアラウト思ヒマス。

II. 群 環 R(G)

§1. 群 G ハ locally compact, separable

8) 註2)参照. ソコデノ証明ハ両側 Ideal ヲ考ヘラレタノデスが片側 Ideal デモ同様ニ成立シマス。

トシ μ ヲ G上ノ右-invariant ナ Haar ノ測度トシマス。[9] G上ノ可測函数ニツイテ $L^p(p \geqq 1)$ ノ定義及ビソコニ於ケル norm

$$(6)\quad \|x(g)\|_p = \left\{\int_G |x(g)|^p dg\right\}^{\frac{1}{p}}$$

ハ周知ノ通リ.

$x(g) \in L^p$, $y(g) \in L^1$ ニ對シ

$$(7)\quad x \times y(g) = z(g) = \int_G x(gh^{-1})\, y(h)\, dh$$

トオケバ簡單ナ計算ニヨリ[10]

$$(8)\quad \|z(g)\|_p \leqq \|x(g)\|_p \cdot \|y(g)\|_1$$

即チ $z(g)$ ハ實際存在シテ L^p ニ屬スルコトガ知ラレマス。

サテ L^1 ト L^p $(p \geqq 1)$ トノ共通部分ヲ $L^{(1,p)}$ トシ $x, y \in L^{(1,p)}$ ニ対シ (7) ニヨリ積ヲ定義スレバソレガ環ニナルコトハ容易ニワカリマス。ソコデ更ニ

$$(9)\quad \|x\| = Max.\,(\|x(g)\|_p,\ \|x(g)\|_1)$$

トオケバ (8) ニヨリ

---

9) 勿論 G ガ適當ナ性質ヲ有スル測度ヲ持ツ群デアレバ locally compact, separable デナクトモヨイノデスガ簡單ノタメニ上ノ如ノシテオキマス。

10) Segal, l.c.

(10) $\|x \times y\| \leq \|x\| \, \|y\|$

デ $L^{(1,p)}$ ハ単位ヲ有スルト云フ條件ヲ除ケバノルム環
他ノ條件ヲ凡ベテ滿シマス。ヨッテ $L^{(1,p)}$ ニ單位 e ヲ附
加シテ

$$\lambda e + x(g), \quad \lambda \in K, \quad x(g) \in L^{(1,p)}$$

ナル全体ヲツクレバコレハ普通ノ様ニシテノルム環トナリ
マス。コレヲ $R = R^{(1,p)}(G)$ トカクコトニシマス。G ガ
discrete ナ場合ニハ既ニ $L^{(1,p)}$ ニ單位ガ存在シ $L^{(1,p)}$
自身ノルム環トナルワケデスガ我々ハコレラノ場合ヲ區別
シナイコトニシマス。

Segal ハ $R^{(1,1)}(G)$ ヲ G ノ群環ト呼ンデオルノ
デスガ $R^{(1,p)}(G)$ ハムシロ補助的ナ意味ヲモツモノデ
$L^{(1,p)}(G)$ ノ方ガ（有限群ノ場合ノ拡張ト考ヘテ
モ）

群環ノ名ニ相應シイノデハナイデセウカ。以下ノ我
々ノ考察モ目標ハ $L^{(1,p)}(G)$ ノ方ニ置イテ進ミタイト
思ヒマス。

$R^{(1,p)}(G)$ ノ中デ考ヘレバ $L^{(1,p)}(G)$ ハ一ツノ
maximal 両側 *Ideal* M。ヲツクリマス。又 $x(g) \in$
$L^{(1,p)}$, $a \in G$ ニ対シ

(11) $\quad ax(g) = x(ga), \quad xa(g) = x(ag)$

ト定義スレバ ax, xa モ亦 $L^{(1,p)}$ ニ属シ特ニ $\|ax\| =$
$\|x\|$

§2. 以下ニ於テハ $L^{(1,p)}(G)$ ノ表現トGノ表現トノ関係ヲ考ヘルコトニシマス。コヽニ表現トハ普通ノ意味ノ有限次行列ニヨル表現ヲ云フワケデスガ特ニGノ表現トシテ0－表現ヲモ許スコトニシマス。即チGノ任意ノ元 a, b ニ対シ $D(a)D(b)=D(ab)$ ヲ満足スル行列系 $\{D(a)\}$ ハスベテコレヲGノ表現ト呼ブコトニシGノ單位ガ單位行列ニ対應スルト云フコトハ要求シナイコトニシマス。

サテ我々ノ目標ハ次ノ定理デアリマス。

定理9. $L^{(1,p)}(G)$ ノ連續表現 $x(g)\to T(x)$ トGノ有界連續表現 $a\to D(a)$ トハ次ノ如キ意味デ一對一ニ對應スル。

i) $L^{(1,p)}(G)$ ノ連續表現 $x(g)\to T(x)$ ガ與ヘラレタトキ適當ニGノ有界連續表現 $a\to D(a)$ ヲトレバ任意ノ $x(g)\in L^{(1,p)}$ ニ対シ

$$T(x)=\int_G x(g)D(g)\,dg \tag{12}$$

トナル。コノ様ナ $D(a)$ ハ $T(x)$ ニヨリ一意的ニ定マリ，コレヲ $D_T(a)$ トカクコトニスル。

ii) Gノ有界連續表現 $a\to D(a)$ ガ與ヘラレタトキ(12)ニヨリ $T(x)$ ヲツクレバ $x(g)\to T(x)$ ハ $L^{(1,p)}(G)$ ノ連續表現ヲ與ヘル。$D(a)$ ニ對應スルコノ表現ヲ $T_D(x)$ トカクコトニスル。

iii) i), ii) ノ對應ハ互ニ他ノ逆ニナッテヰル。即チ任意ノ $T(x)$, $D(a)$ ニ對シ

$$T_{D_T}=T,\quad D_{T_D}=D$$

iv) 上ノ對應デ等値ナ表現ハ等値ナ表現ニ對應スル。即チ $AT_1(x)A^{-1}=T_2(x)$ ナラバ $AD_{T_1}(a)A^{-1}=D_{T_2}(a)$ 又 $BD_1(a)B^{-1}=D_2(a)$ ナラバ $BT_{D_1}(x)B^{-1}=T_{D_2}(x)$.

證明. 各段ニ分ケテ證明シマスガ面倒ナノハ i) ダケデアトハコレカラ直チニ出マス。

i) $L^{(1,p)}(G)$ ノ表現ヲ $x(t)\to T(x)=\{t_{ij}(x(g))\}$ トオイテ $t_{ij}(x(g))$ ヲ考ヘテ見マス。

$T(x)$ ハ連續表現ナル故定理3ニヨリ $|t_{ij}(x(g))|\leq C\|x(g)\|$ ナル常數 C ガ存在シマス。

特ニ有限ナ測度ヲ有スル集合 E ノ特性函數 $\chi_E(g)$ ヲトレバ

(13) $$\left|t_{ij}(\chi_E(g))\right|\leq C\|\chi_E(g)\|=C\max\left(\mu(E),\mu(E)^{\frac{1}{p}}\right)$$

ヨッテ適當ニ可測函數 $u_{ij}(g)$ ヲトレバ[11] 上ノ如キ任意ノ E ニ對シ

(14) $$t_{ij}(\chi_E(g))=\int_E u_{ij}(g)\,dg=\int_G \chi_E(g)\,u_{ij}(g)\,dg$$

---

(11) $p=1$ ナラバ $u_{ij}(g)$ ハ有界, $p\geqq 2$ ナラバ差當リ適當ニ $\mu(E)\leq 2$ ナル E ガ存在シテ E ノ外デハ $u_{ij}(g)$ ハ有界 E 上デハ $L_E^q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ ニ屬スルコトガワカル. 実ハコノトキモ $u_{ij}(g)$ ガ有界ナルコトハ以下ノ證明ニ示ス通リデス。

$t_{ij}(x(g))$ガ連續ナルコトヲ用ヒレバコレカラ一般ニ

$$t_{ij}(x(g))=\int_G x(g)u_{ij}(g)\,dg$$

即チ $\mathrm{U}(g)=\{u_{ij}(g)\}$ トオケバ.

$$(15)\quad \mathrm{T}(x)=\int_G x(g)\,\mathrm{U}(g)\,dg$$

$\mathrm{T}(x)$ ハ表現デスカラ $L^{(1,p)}(G)$ ニ含マレル任意ノ $x(g)$, $y(g)$ ニ對シテ $\mathrm{T}(x)\,\mathrm{T}(y)=\mathrm{T}(x\times y)$, 即チ

$$\int x(g)\,\mathrm{U}(g)\,dg\int y(h)\,\mathrm{U}(h)\,dh$$

$$=\int x(gh^{-1})\,y(h)\,\mathrm{U}(g)\,dg\,dh$$

ヨッテ $\int x(g)\,y(h)\,\mathrm{U}(g)\,\mathrm{U}(h)\,dg\,dh$

$$=\int x(g)\,y(h)\,\mathrm{U}(gh)\,dg\,dh$$

有限ノ測度ヲ有スル集合ノ特性函數ハ凡テ $L^{(1,p)}(G)$ ニ含マレマスカラ上式カラ (g,h)－測度 0 ヲ除キ

$$(16)\quad \mathrm{U}(g)\,\mathrm{U}(h)=\mathrm{U}(gh)$$

ヲ得マス。ヨッテ適當ニ測度 0 ナル集合 X_0 ヲトレバ $h\notin X_0$ ナラバ測度 0 ナル集合 X_h ガ定ッテ $g\notin X_h$ ニ對シ (16) ガ成立シマス。故ニ $a\notin X_0$ ノトキハ

$$\mathrm{T}(a^{-1}x)=\int x(ga^{-1})\,\mathrm{U}(g)\,dg=\int x(g)\,\mathrm{U}(ga)\,dg$$